Aufgabe 22: Seil über Kante

Es soll die Bewegung eines Seiles der Länge l und der Masse m beim Rutschen über eine Kante beschrieben werden. $x < l$ sei die Länge des Seilstücks, dass über der Kante hängt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist das Seil in Ruhe und das Stück $x_0 < l$ hängt schon über.

1. Aufstellen der Bewegungsgleichung. Die Gravitationskraft wirkt nur auf das Stück x, das über der Kante runterhängt. Die restliche Gewichtskraft wird von der zum Boden parallelen Auflage kompensiert. Damit lautet die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} = F(x) = mg\frac{x}{l} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = \frac{g}{l}x \tag{1}$$

2. Lösen der Bewegungsgleichung. Wir haben es bei Gl. (1) mit einer linearen gewöhnlichen DGL zweiter Ordnung zu tun. Dementsprechend (aufgrund der Linearität) machen wir zur Lösung einen Ansatz $x(t) \sim \exp(\lambda \cdot t)$. In Gl. (1) eingesetzt erhalten wir

$$\begin{aligned} & \lambda^2 \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot t} = \frac{g}{l} \cdot \mathrm{e}^{\lambda \cdot t} \\ \Rightarrow \qquad & \underbrace{\mathrm{e}^{\lambda \cdot t}}_{\neq 0} \cdot (\lambda^2 - \frac{g}{l}) = 0 \\ \Rightarrow \qquad & \lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{l}} \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung der DGL in Gl. (1) ist dann gegeben durch

$$x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{\lambda_1 \cdot t} + B \cdot \mathrm{e}^{\lambda_2 \cdot t} = A \cdot \mathrm{e}^{+\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t} + B \cdot \mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t} \tag{2}$$

Nun müssen nur noch die Koeffizienten A und B anhand der Randbedingungen (d.h. Anfangsbedingungen) bestimmt werden. Wir wissen, dass zu Beginn (t=0) das Stück x_0 über der Kante hängt und die Geschwindigkeit des Seiles Null ist:

$$x(0) = x_0 \qquad \text{und} \qquad \dot{x}(0) = 0 \tag{3}$$

Das in die allgemeine Lösung (2) und der daraus resultierenden Geschwindigkeit eingesetzt ergibt zwei Gleichungen mit den Unbekannten A und B

$$x(0) = A \cdot \mathrm{e}^0 + B \cdot \mathrm{e}^0 = x_0 \quad \Rightarrow \quad A + B = x_0 \tag{4}$$

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot A \cdot \mathrm{e}^0 - \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot B \cdot \mathrm{e}^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad A - B = 0 \tag{5}$$

Aus dem Gleichungssystem bestehend aus Gl. (4) und Gl. (5) können wir nun die Koeffizienten bestimmen zu

$$A = B = \frac{1}{2}x_0$$

Die gesamte Lösung für $x(t)$ lautet dann

$$x(t) = x_0 \cdot \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$$