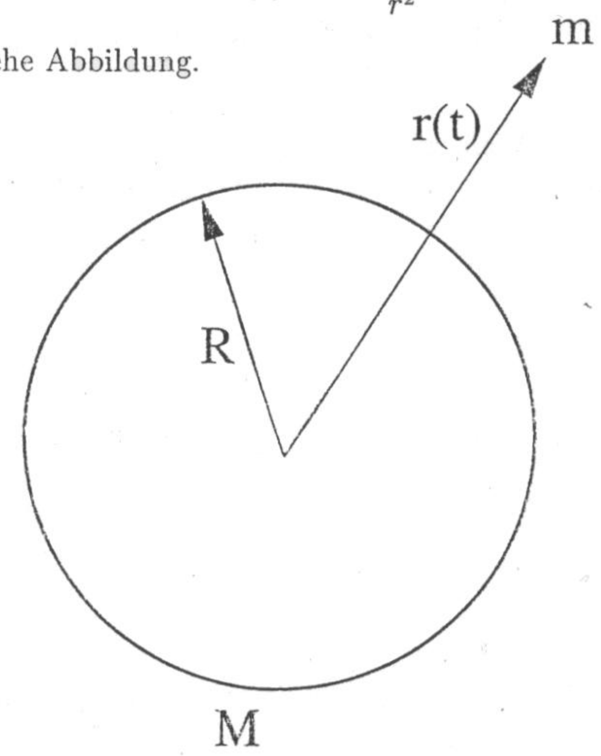
Nachklausur zur Vorlesung
Physik I
Münster, 6. 5. 2003

Aufgabe 1: Eindimensionale Bewegungen im Schwerkraftfeld

Eine Punktmasse m werde von der Masse M der Erde, die im Ursprung fixiert ist, mit der Gravitationskraft

$$F(r) = -\frac{GmM}{r^2} \tag{1}$$

angezogen, siehe Abbildung.



Physik I   Friedrich A. Lingehaus

Teil A: Allgemeines

a) Stellen Sie die Newtonsche Bewegungsgleichung auf. (1 Pkt)

b) Leiten Sie den Energiesatz her. Bestimmen Sie das Gravitationspotential. (1 Pkt)

Teil B: Vertikaler Wurf

Diskutieren Sie den vertikalen Wurf der Masse m. Zum Zeitpunkt $t = 0$ seien die Anfangsgeschwindigkeit und der Ort der Masse m gegeben durch $v(0) = v_0 > 0$ und $r(0) = R$.

c) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Bewegung. (1 Pkt)

d) Bestimmen Sie $v(r)$ für $r \geq R$ und $v(r) \geq 0$ mit Hilfe des Energiesatzes. (1 Pkt)

e) Wie gross muss v_0 mindestens sein, damit die Masse m den Schwerebereich der Erde verlässt? (1 Pkt)

Teil C: Absturz eines Meteors

Ein Meteor ruhe zum Zeitpunkt $t = 0$ bei $r(0) = a \gg R > 0$ (beachte: die Anfangsgeschwindigkeit ist Null). Für $t > 0$ bewege sich der Meteor auf die Erde zu. Man vernachlässige den Radius der Erde und betrachte $R = 0$.

f) Bestimmen Sie die Gesamtenergie der Bewegung. (1 Pkt)

g) Bestimmen Sie $v(r)$ für $r \in [0, a]$ und $v(r) \leq 0$ mit Hilfe des Energiesatzes. (1 Pkt)

h) Bestimmen Sie $r(t)$. (1 Pkt) Hinweis:

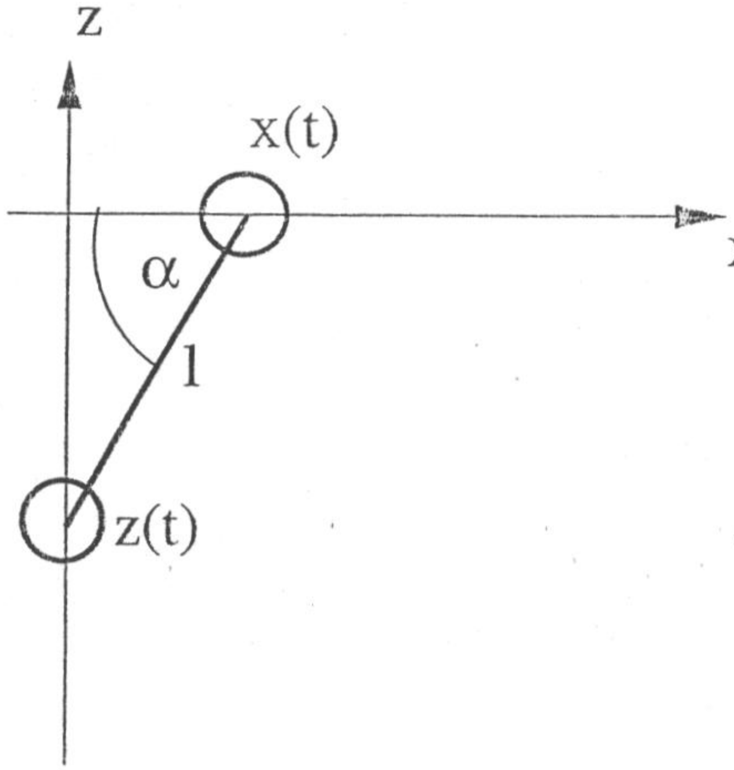
$$\int_a^r \sqrt{\frac{x}{a-x}}\, \mathrm{d}x = -\sqrt{r(a-r)} - a \arctan \sqrt{\frac{a-r}{r}} \qquad (2)$$

i) Wann wird der Meteor mit der Erde zusammenprallen? (1 Pkt) Hinweis:

$$\lim_{x \to \infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \qquad (3)$$

Aufgabe 2: Kugeln auf der Stange

Zwei gleich schwere Kugeln (Masse m), die durch eine starre Stange der Länge l verbunden sind, können sich reibungsfrei auf zwei Stangen entlang der x-Achse bzw. z-Achse bewegen, siehe Abbildung. Kugel A hat die Koordinaten $(x(t), z = 0)$. Kugel B hat die Koordinaten $(x = 0, z(t))$.



a) Drücken Sie $x(t)$ und $z(t)$ als Funktion von $\alpha(t)$ aus. (1 Pkt)

b) Berechnen Sie die kinetische Energie T und die potentielle Energie U des Systems in Abhängigkeit von α. Wie lautet der Energiesatz? (1 Pkt)
Hinweis:

$$\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \tag{4}$$

c) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für $\alpha(t)$ her, indem Sie den Energiesatz nach der Zeit ableiten. (1 Pkt)

d) Die Bewegungsgleichung für $\alpha(t)$ kann man in folgender Form aufschreiben:

$$ml^2\ddot{\alpha} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\alpha}\,, \tag{5}$$

wobei U die potentielle Energie des Systems ist [siehe Aufgabenteil b)].

Zeichnen Sie das Potential $U(\alpha)$.

Erklären Sie anhand der Zeichnung, welche Lösungen von Gl. (5) stationäre Punkte sind und welche der stationären Punkte stabil und instabil sind. (2 Pkt)

e) Führen Sie die Variable $\delta(t) = \alpha(t) - 90^0$ ein. Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für α an der Stelle $\alpha = 90^0$ und leiten Sie so eine lineare Bewegungsgleichung für $\delta(t)$ her.

Wie lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung für $\delta(t)$?

Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung für die Anfangsbedingungen $\alpha(0) = 4\pi/9$ $(= 80^0)$ und $\dot{\alpha}(0) = 0$? (2 Pkt)