Lenz-Vektor

Der Lenz-Vektor ist definiert durch

$$\vec{A} = \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) + \vec{r} \cdot V(r) \tag{1}$$

Nun soll gezeigt werden, dass der Lenz-Vektor für ein Zentralpotential der Form $V(r) = {}^{-\alpha}\!/_{r}$ eine Erhaltungsgröße, d.h. zeitlich konstant ist.

Wir wissen, dass in einem Zentralpotential der Drehimpuls $\vec{L}$ eine Erhaltungsgröße ist. Desweiteren brauchen wir ein paar Hilfsformel, die größtenteils schon in vorangegangenen Aufgaben bewiesen wurden:

Die zweite zeitliche Ableitung von $\vec{r}$ können wir durch das Potential ausdrücken, denn mit

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2 + y +^2 + z^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} \tag{2}$$

gilt

$$\operatorname{grad} V(r) = \begin{pmatrix} {}^{\partial}\!/_{\partial x} \\ {}^{\partial}\!/_{\partial y} \\ {}^{\partial}\!/_{\partial z} \end{pmatrix} V(r) = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \begin{pmatrix} {}^{\partial r}\!/_{\partial x} \\ {}^{\partial r}\!/_{\partial y} \\ {}^{\partial r}\!/_{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{e}_r \tag{3}$$

und damit dann weiter

$$m\ddot{\vec{r}} = -\operatorname{grad} V(r) \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{\vec{r}} = -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{e}_r. \tag{4}$$

Desweiteren benötigen wir den Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right). \tag{5}$$

Eine weitere Formel ergibt sich mit dem Entwicklungssatz und der Zyklizität des Spatproduktes

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \times \vec{d}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{d} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \left(\vec{d} \cdot \vec{b}\right) - \vec{b}\left(\vec{d} \cdot \vec{a}\right)\right). \tag{6}$$

a) $\vec{A}$ ist eine Erhaltungsgröße

Damit $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist, muss gelten, dass

$$\frac{d}{dt}\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \tag{7}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{A} &= \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right)}_{\text{mit Gl. (4)}} + \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \frac{d}{dt}\vec{L}}_{=0,\text{ da } \vec{L} \text{ konst}} + \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot V(r)) \\
&= -\frac{1}{m}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\vec{e}_r \times \vec{L}\right) + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) + \vec{r} \cdot \left(\underbrace{\operatorname{grad} V(r)}_{\text{mit Gl. (3)}} \cdot \dot{\vec{r}}\right) \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \underbrace{\left(\vec{r} \times \left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right)\right)}_{\text{Entwicklungssatz Gl. (5)}} + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right) \\
&= -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right) - \dot{\vec{r}}(\vec{r} \cdot \vec{r})\right) + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \vec{r} \cdot \left(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}\right) \\
&= r\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) \qquad (8)
\end{aligned}
$$

Mit dem vorausgesetzten Potential und dessen Ableitung nach r

$$
\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r}\frac{\alpha}{r} = \frac{\alpha}{r^2} = -\frac{V(r)}{r} \qquad (9)
$$

ergibt sich dann, dass $\vec{A}$ eine Erhaltungsgröße ist:

$$
\frac{d}{dt}\vec{A} = r\frac{\partial V}{\partial r} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) = -r\frac{V(r)}{r} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot V(r) = 0. \qquad (10)
$$

b) Berechnung des Betrages von $\vec{A}$

$$
\begin{aligned}
|\vec{A}|^2 &= \left|\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) + \vec{r} \cdot V(r)\right|^2 \\
&= \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) \cdot \left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right)}_{\text{Spatprodukt Gl. (6)}} + 2 \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}\right) \cdot \vec{r}}_{\text{zykl. vertauschen}} \cdot V(r) + r^2 V^2 \\
&= \left(\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\right)\left(\vec{L} \cdot \vec{L}\right) - \underbrace{\left(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{L}\right)}_{=0,\text{ da } \dot{\vec{r}} \perp \vec{L}} \left(\vec{L} \cdot \dot{\vec{r}}\right) + 2V(r) \cdot \vec{L} \cdot \underbrace{\left(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}\right)}_{=\frac{1}{m}\vec{L}} + r^2 V^2 \\
&= L^2 \dot{r}^2 + \frac{2L^2}{m} V(r) + r^2 V^2 \\
&= \frac{2L^2}{m} \underbrace{\left(\frac{m}{2}\dot{r}^2 + V(r)\right)}_{=E} + r^2 \left(\frac{-\alpha}{r}\right)^2 \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \qquad |\vec{A}| = \sqrt{\frac{2L^2}{m}E + \alpha^2} \qquad (12)
$$