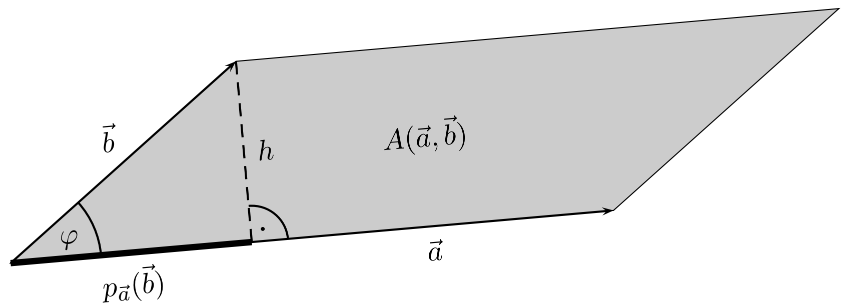

Nach dem Satz des Pythagoras ist

$$h^2 = |\vec{b}|^2 - \Big(p_{\vec{a}}(\vec{b})\Big)^2 = |\vec{b}|^2 - \left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)^2 \tag{1}$$

Andererseits kann die Fläche A des Parallelogramms auch geschrieben werden als

$$\Big[A(\vec{a},\vec{b})\Big]^2 = a^2 \cdot h^2 \tag{2}$$

Es ergibt sich also mit Gl. 2 in Gl. 1 eingesetzt

$$\Big[A(\vec{a},\vec{b})\Big]^2 = a^2 b^2 - \Big(\vec{a}\cdot\vec{b}\Big)^2 \tag{3}$$

Berechnen wir die Fläche nun über die Komponentendarstellung der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\Big[A(\vec{a},\vec{b})\Big]^2 &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\
&= a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_1^2b_3^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_2^2b_3^2 + a_3^2b_1^2 + a_3^2b_2^2 + a_3^2b_3^2 \\
&\quad - a_1^2b_1^2 - a_2^2b_2^2 - a_3^2b_3^2 - 2a_1b_1a_2b_2 - 2a_1b_1a_3b_3 - 2a_2b_2a_3b_3 \\
&= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 \\
&= \Big|\vec{a}\times\vec{b}\Big|^2 \qquad (4)
\end{aligned}$$

Nun kann man den Flächeninhalt auch berechnen, indem man in Gl. 1 die Beziehung

$$h^2 = (b\cdot\sin\varphi)^2 \tag{5}$$

einsetzt. Damit erhalten wir

$$\Big[A(\vec{a},\vec{b})\Big]^2 = a^2\cdot h^2 = (a\cdot b\cdot\sin\varphi)^2 \tag{6}$$

und dementsprechend durch Vergleich mit Gl. 4 die Beziehung

$$\Big|\vec{a}\times\vec{b}\Big| = a\cdot b\cdot\sin\varphi. \tag{7}$$