Rechnen mit Vektoren in Komponentenschreibweise

Eine alternative Art Rechnungen mit Vektoren durchzuführen ist die Komponentendarstellung. Im Folgenden habe ich versucht die wichtigsten grundlegenden Beispiele zusammenzustellen.

Das Skalarprodukt lässt sich in Komponentenschreibweise für drei Dimensionen schreiben als

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i \tag{1}$$

Auch das Kreuzprodukt kann man in Komponentendarstellung schreiben. Die i-te Komponente (mit $i = 1, 2, 3$) ist dann gegeben durch

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \qquad \text{mit} \quad i = 1, 2, 3 \tag{2}$$

Dabei ist ϵ_{ijk} der Levi-Civita-Tensor (auch total antisymmetrischer Tensor dritter Stufe genannt), welcher definiert ist durch

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{für} \quad ijk = 213, 132, 321 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Der Tensor ist also gleich 1 für zyklische Vertauschungen von 123 (d.h. gerade Permutationen von 123), gleich -1 für zyklische Vertauschungen von 213 (d.h. ungerade Permutationen von 123) und 0 für alle sonstigen Indexpaare.

Das Kreuzprodukt kann man unter Verwendung der kanonischen Einheitsvektoren, die im Dreidimensionalen definiert sind durch

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \tag{4}$$

auch komplett (d.h. nicht nur wie in Gl. (2) dessen i-te Komponente) ausschreiben:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \cdot \left(\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \right) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j\, b_k \cdot \vec{e}_i \tag{5}$$

Mit der Schreibweise aus Gl. (2) lässt sich das Spatprodukt ebenso mit dem Levi-Civita-Tensor hinschreiben und wir erhalten

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) &= \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)_i \\ &\overset{\text{Gl. (2)}}{=} \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, b_j\, c_k \\ &= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_i\, \epsilon_{ijk}\, b_j\, c_k. \end{aligned} \tag{6}$$

Mit der Beziehung

$$\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} \tag{7}$$

lässt sich nun aus Gl. (6) die Zyklizität des Spatproduktes herleiten, d.h. dass gilt

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \tag{8}$$

Desweiteren lässt sich auch der Entwicklungssatz

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) \tag{9}$$

entsprechend in Komponentenschreibweise herleiten. Dazu benötigt man die Hilfsformel

$$\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}. \tag{10}$$

Mit dieser Formel können wir dann den Entwicklungssatz in Komponentenschreibweise beweisen. Die i-te Komponente mit $i = 1, 2, 3$ berechnet sich dann wie folgt:

$$\begin{aligned}
\left[\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)\right]_i &\overset{Gl.\ (2)}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)_k \\
&\overset{Gl.\ (2)}{=} \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, a_j \cdot \left(\sum_{l,m=1}^{3} \epsilon_{klm}\, b_l\, c_m\right) \\
&= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm}\, a_j\, b_l\, c_m \\
&= \sum_{j,l,m=1}^{3} a_j\, b_l\, c_m \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}\, \epsilon_{klm}\right)}_{\text{mit Gl. (10) ersetzen}} \\
&= \sum_{j=1}^{3} a_j \cdot \left(\sum_{l,m=1}^{3} b_l\, c_m\, \delta_{il}\, \delta_{jm} - b_l\, c_m\, \delta_{im}\, \delta_{jl}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{3} a_j \cdot (b_i\, c_j - b_j\, c_i) \\
&= b_i \cdot \sum_{j=1}^{3} a_j\, c_j - c_i \cdot \sum_{j=1}^{3} a_j\, b_j \\
&= b_i \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i \cdot \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Als Erweiterung kann man nun auch noch das vierfache Kreuzprodukt mit dem Levi-Civita-Tensor berechnen. Diese etwas länglichere Rechnung habe ich als separate Datei unter www.bersch.net/physik1/pdf/vierfach-kreuzprodukt.pdf hinterlegt. Im Prinzip wird dort dieselbe Rechnung wie in Gl. (11) mit lediglich noch einem dritten ϵ_{xyz} durchgeführt.