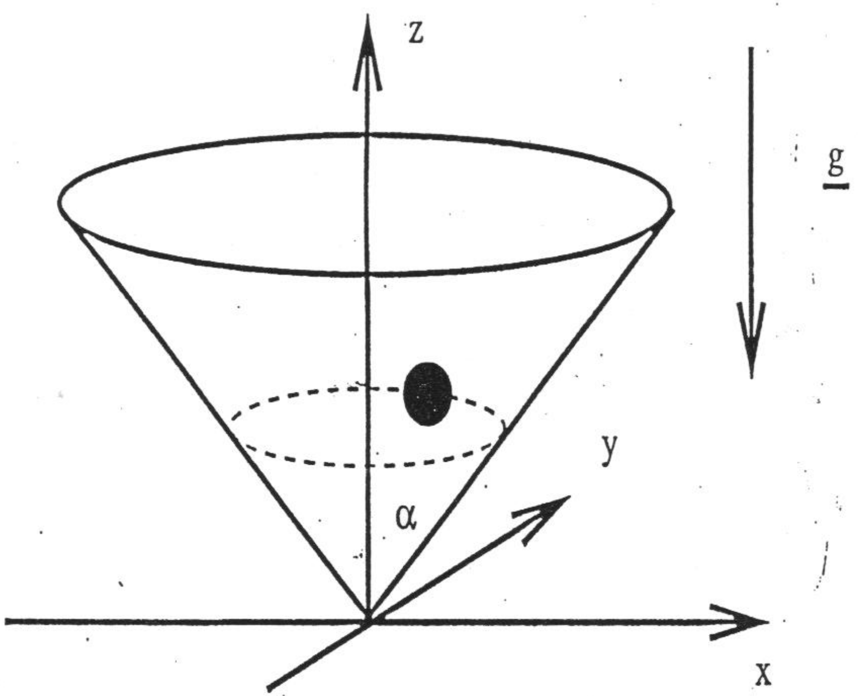
Phy L 2002/03 Friedrich, Arlinghaus

(1 von 4)

Aufgabe 1:
Teilchen auf der Oberfläche eines Kegels



Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Swchwerefeld auf der Oberfläche eines Kegels mit Öffnungswinkel α.

a) Beschreiben Sie die Position des Teilchens in Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(t) + z(t)\mathbf{e}_z \tag{1}$$

Führen Sie dazu die folgenden Einheitsvektoren ein:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= (cos\varphi, sin\varphi, 0) \\ \mathbf{e}_\varphi &= (-sin\varphi, cos\varphi, 0) \\ \mathbf{e}_z &= (0,0,1) \end{aligned} \tag{2}$$

Welche Beziehung besteht zwischen $r(t)$ und $z(t)$? (1 Pkt)

Lösung:

$$\mathbf{r} = r(t)\mathbf{e}_r(t) + \frac{r(t)}{tan\alpha}\mathbf{e}_z \tag{3}$$

b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Teilchens (1 Pkt).

Lösung:

$$\mathbf{v} = \dot{r}(t)\mathbf{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\mathbf{e}_\varphi + \frac{\dot{r}(t)}{tan\alpha}\mathbf{e}_z \tag{4}$$

c) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Teilchens (1 Pkt).

Lösung:

$$\mathbf{a} = [\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\varphi}(t)^2]\mathbf{e}_r + [2\dot{r}(t)\dot{\varphi} + r(t)\ddot{\varphi}(t)]\mathbf{e}_\varphi + \frac{\ddot{r}(t)}{tan\alpha}\mathbf{e}_z \tag{5}$$

d) Welche potentielle Energie besitzt das Teilchen in Abhängigkeit von r? (1 Pkt)

Lösung:

$$U = mg\frac{r}{tan\alpha} \tag{6}$$

e) Bestimmen Sie seine kinetische Energie und formulieren Sie den Energiesatz. (2 Pkte)

Lösung:

$$T = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{tan^2\alpha}] \tag{7}$$

$$E = \frac{m}{2}[\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \frac{\dot{r}^2}{tan^2\alpha}] + mg\frac{r}{tan\alpha} \tag{8}$$

f) Bestimmen Sie den Drehimpuls L des Teilchens in $\mathbf{e}_z$ Richtung. Was können Sie über diese Grösse aussagen? (2 Pkte)

Lösung:

$$L = mr^2\dot{\varphi} = const \tag{9}$$

Phy I 2002/03
(2 von 4)

c) Wie lautet der Energiesatz. Berechnen Sie daraus das zeitliche Verhalten des Winkels $\varphi(t)$ zur Anfangsbedingung $\dot{\varphi}(t) = 0$ sowie $s(t)$. Vergleichen Sie mit der Bewegung einer Punktmasse (2 Pkte).

Lösung:

$$E = \frac{1}{2}mR^2[\dot{\varphi}(t)]^2 + \frac{1}{2}\Theta[\dot{\varphi}(t)]^2 + mg[(Rcos\alpha + H) - sin\alpha\varphi R] \tag{9}$$

$$\begin{aligned} 0 &= [mR^2 + \Theta]\ddot{\varphi}(t) - mgRsin\alpha \\ \varphi(t) &= \frac{1}{2}mg\frac{R}{mR^2+\Theta}\sin\alpha t^2 \\ s &= \frac{1}{2}mg\frac{R^2}{mR^2+\Theta}\sin\alpha t^2 \end{aligned} \tag{10}$$

Grenzfall Punktmasse: $\Theta \rightarrow 0$

Phy I 2002/03
3 von 4

Aufgabe2: Die rollende Walze

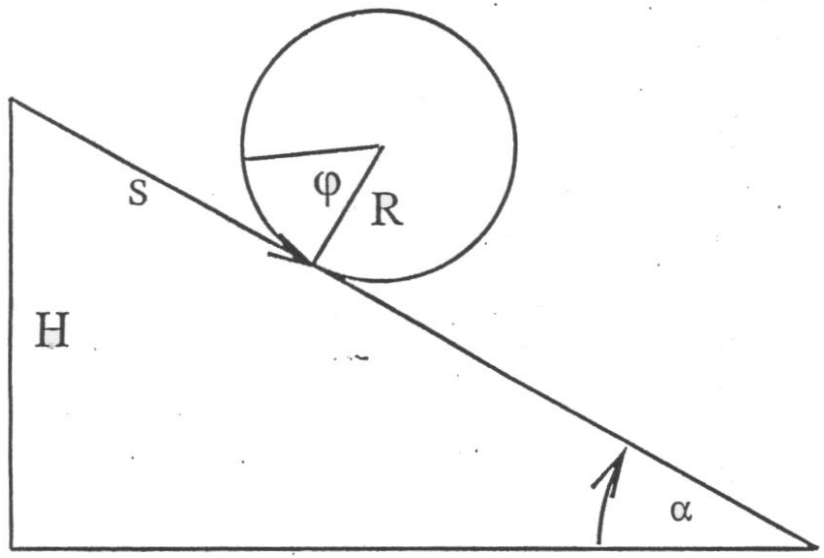


Abbildung 1

Eine Walze mit Trägheitsmoment Θ rollt ohne zu gleiten eine schiefe Ebene hinab (siehe Abbildung Nr. 1).

a) Die Walze besitze die Länge L, den Radius R sowie eine zylindersymmetrische Dichtverteilung

$$\rho(r) = b + ar^2 \quad (1)$$

Berechnen Sie die Gesamtmasse m sowie das Trägheitsmoment bezüglich einer Drehung um die Zylinderachse (2 Pkte).

Lösung: Masse

$$\begin{aligned} M &= \int dV\rho(r) = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} \int_0^R r\rho(r) \\ &= 2\pi L \int_0^R dr(br + ar^3) = 2\pi L[\frac{b}{2}R^2 + \frac{a}{4}R^4] \end{aligned} \quad (2)$$

Trägheitsmoment

$$\begin{aligned} \Theta &= \int dV\rho(r)r^2 = \int_0^L dz \int_0^{2\pi} \int_0^R rr^2\rho(r) \\ &= 2\pi L \int_0^R dr(br^3 + ar^5) = 2\pi L[\frac{b}{4}R^4 + \frac{a}{6}R^6] \end{aligned} \quad (3)$$

b) Welche Relation besteht zwischen dem Rotationswinkel φ und der zurückgelegten Strecke s, falls die Walze rollt und nicht gleitet (1 Pkt).

Lösung

$$ds = Rd\varphi \quad (4)$$

bzw.

$$s = R\varphi \quad (5)$$

Dann wurde $s = 0$ und $\varphi = 0$ als Anfangsbedingung gewählt.

c) Bestimmen Sie die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung sowie der Rotationsbewegung in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}(t)$ (1 Pkt).

Lösung:

$$T_S = \frac{1}{2}m[\dot{s}(t)]^2 = \frac{1}{2}mR^2[\dot{\varphi}(t)]^2 \quad (6)$$

$$T_R = \frac{1}{2}\Theta[\dot{\varphi}(t)]^2 \quad (7)$$

d) Bestimmen Sie die potentielle Energie der Walze in Abhängigkeit des Drehwinkels φ (1 Pkt).

Lösung

$$U = mgR_y = Mg[(R + L) - sin\alpha s] = mg[(Rcos\alpha + H) - sin\alpha R\varphi] \quad (8)$$

Phy I 2002/03

g) Zeigen Sie, dass für die r-Koordinate des Teilchens folgende Bewegungsgleichung gilt: (1 Pkt)

$$m(1+\frac{1}{tan^2\alpha})\ddot{r}(t) = \frac{L^2}{mr^3} - \frac{mg}{tan\alpha} \tag{10}$$

Lösung: Energiesatz, einmal nach der Zeit differenzieren

$$E = \frac{m}{2}\dot{r}^2[1+\frac{1}{tan^2\alpha}] + \frac{L^2}{2mr^2} + mg\frac{r}{tan\alpha} \tag{11}$$

h) Gibt es eine Lösung mit $r(t) = r_0 = const$? Was können Sie über deren Stabilität ausagen? Hinweis: Diskutieren Sie das effektive Potential (2 Pkte):

$$U_{eff} = \frac{L^2}{2mr^2} + mg\frac{r}{tan\alpha} \tag{12}$$

Lösung:

$$R^3 = \frac{L^2 tan\alpha}{m^2 g} \tag{13}$$

Stabil,

i) Betrachten Sie Abweichungen $x(t)$ von der Ruhelage r_0:

$$r(t) = r_0 + x(t) \tag{14}$$

Wie lautet die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen x(t) (Hinweis: Entwickeln Sie in der Bewegungsgleichung die Kraft in eine Taylorreihe) (1 Pkt).

Lösung:

$$\frac{L^2}{m(r_0+x)^3} = \frac{L^2}{mr_0^3(1+x/r_0)^3} \approx (1-3\frac{x}{r_0}+..)\frac{L^2}{mr_0^3} \tag{15}$$

Bewegungsgleichung:

$$m(1+\frac{1}{tan^2\alpha}\ddot{x}(t) = -3\frac{L^2}{mr_0^4}x \tag{16}$$

j) Wie lautet die Lösung der Bewegungsgleichung für kleine x(t) (1 Pkt)?

Lösung:

$$x(t) = Asin(\Omega t + \phi)$$
$$\Omega = \sqrt{\frac{L^2 sin^2\alpha}{m^2 r_0^4}}$$