Aufgabe 30: Periheldrehung

Auf einen Planeten soll zusätzlich zum Gravitationspotential das folgende Potential einwirken

$$U_z = \frac{\eta}{r^2}. \tag{1}$$

Im Folgenden sollen ebene Polarkoordinaten verwendet werden. Das können wir machen, da die Bewegung des Massenpunktes in der Ebene senkrecht zu $\vec{L}$ stattfindet, denn es gilt

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \left\{ \vec{r} \times \dot{\vec{r}} \right\} = 0 \tag{2}$$

wobei $\vec{L}$ sowohl vom Betrag als auch von der Richtung her konstant ist. Der Ortsvektor hat in diesen Koordinaten die Form $\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$ mit den beiden orthonormierten Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Die Einheitsvektoren müssen trotz ebener Polarkoordinaten dreidimensional sein, da das Kreuzprodukt ($\rightarrow \vec{L}$) nur für drei Dimensionen definiert ist. Die Geschwindigkeit hat dann die Form

$$\begin{aligned} \dot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{e}_r) = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \frac{d}{dt} e_r \\ &= \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

Entsprechend ergibt sich für die Beschleunigung

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \frac{d}{dt}(\dot{r} \cdot \vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \\ &= \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\, \vec{e}_\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

a) Energie- und Flächensatz in ebenen Polarkoordinaten

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für eine Zentralkraft lautet allgemein

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) = F(r) \cdot \vec{e}_r = -\frac{dU(r)}{dr} \cdot \vec{e}_r \tag{6}$$

Daraus erhalten wir durch Multiplikation beider Seiten mit $\dot{\vec{r}}$ und identifizieren der zeitlichen Ableitungen den Energiesatz in der Form

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{m\dot{\vec{r}}}{2} \right)^2 &= -\frac{dU(r)}{dr} (\vec{e}_r \cdot \dot{\vec{r}}) \\ &\overset{Gl.\ (4)}{=} -\frac{dU(r)}{dr} \left(\vec{e}_r \cdot (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi} \cdot \vec{e}_\varphi) \right) \\ &= -\frac{dU(r)}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = -\frac{dU(r)}{dt} \end{aligned} \tag{7}$$

Mit dem Potential in Gl. (1) für das modifizierte Kepler-Problem und der Geschwindigkeit in Polarkoordinaten erhalten wir den Energiesatz

$$\begin{aligned} E &= \frac{m\left(\dot{\vec{r}}\right)^2}{2} + U(r) \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi)^2 + \frac{\eta}{r^2} - \frac{\gamma m M}{r} \\ &= \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{\eta}{r^2} - \frac{\gamma m M}{r} = \text{konstant} \end{aligned} \tag{8}$$

Weiter wissen wir, dass in einem Zentralkraftfeld ($\vec{F} = f(\vec{r}) \cdot \vec{e}_r \Rightarrow \ddot{\vec{r}} \parallel \vec{r}$) der Drehimpuls erhalten bleibt

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = m\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = m\Big(\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0} + \underbrace{\vec{r} \times \ddot{\vec{r}}}_{=0,\text{ da } \vec{r} \parallel \ddot{\vec{r}}}\Big) = 0. \tag{9}$$

Der Drehimpuls lautet in Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) \\ &= mr\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_r}_{=0} + mr^2\dot{\varphi}\underbrace{\vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi}_{=\vec{e}_z} = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z \end{aligned} \tag{10}$$

Aus Gl. (9) folgt nun unmittelbar, dass die Flächengeschwindigkeit c konstant ist und damit das 2. Keplersche Gesetz erfüllt ist:

$$c = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{1}{2m}|\vec{L}| = \frac{1}{2}|r^2\dot{\varphi}| \overset{Gl.\ (9)}{=} \text{konstant} \tag{11}$$

b) Herleitung der Bahnkurve

Die Newtonsche Bewegungsgleichung sieht mit dem veränderten Potential und der Beschleunigung in ebenen Polarkoordinaten gemäß Gl. (5) wie folgt aus:

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} &= m\left(\left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r + \left(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}\right)\vec{e}_\varphi\right) \\ &= -\left(\frac{\gamma m M}{r^2} + \frac{2\eta}{r^3}\right)\vec{e}_r \end{aligned} \tag{12}$$

Für diese Bewegungsgleichung haben wir im vorangegangenen Abschnitt schon den Energiesatz hergeleitet. In Gl. (8) können wir nun $\dot{\varphi}$ durch den Drehimpuls ausdrücken

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{mr^2}. \tag{13}$$

Der Energiesatz lautet dann

$$\begin{aligned} E &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} + \frac{\eta}{r^2} - \frac{\gamma m M}{r} \\ &= \frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \text{konstant} \end{aligned} \tag{14}$$

Diese Gleichung kann weiter umgeformt werden zu

$$\dot{r}(t) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - U_{\text{eff}}(r)\right)} \tag{15}$$

Davon ausgehend können wir nun durch Integration die Form der Bahnkurve bestimmen.

Da für eine Planetenbahn eine Darstellung in Abhängigkeit vom Winkel φ anschaulicher ist als von der Zeit t, substituieren wir $r(t) = r(\varphi(t))$. Dann ist

$$\dot{r}(t) = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{dr(\varphi)}{d\varphi}\frac{L}{mr^2} \tag{16}$$

Dies in Gl. (15) eingesetzt kann dann mit Trennung der Variablen integriert werden

$$\int_{r_0=r(\varphi_0)}^{r(\varphi)} \frac{L}{mR^2}\frac{dR}{\pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{\text{eff}})}} = \varphi - \varphi_0 \tag{17}$$

Einsetzen von $U_{\text{eff}}(r)$ ergibt

$$\begin{aligned}
&\int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{1}{R^2}\frac{dR}{\sqrt{\frac{m^2}{L^2}\frac{2}{m}\left(E + \frac{\gamma mM}{R} - \frac{L^2}{2mR^2} - \frac{\eta}{R^2}\right)}} = \pm(\varphi - \varphi_0)\\
\Rightarrow \quad &\int_{r_0}^{r(\varphi)} \frac{1}{R^2}\frac{dR}{\sqrt{\frac{2mE}{L^2} + \frac{2\gamma Mm^2}{L^2}\frac{1}{R} - \left(1 + \frac{2m\eta}{L^2}\right)\frac{1}{R^2}}} = \pm(\varphi - \varphi_0)
\end{aligned} \tag{18}$$

Nun muss im Grunde genommen nur noch das Integral in Gl. (18) zur Lösung des Problems berechnet werden.

Die Berechnung eines Integrals des Typen

$$I = \int \frac{1}{R^2}\frac{dR}{\sqrt{c + \frac{b}{R} - \frac{a}{R^2}}} \tag{19}$$

mit den Parametern (speziell für unser Problem)

$$a = 1 + \frac{2m\eta}{L^2}, \qquad b = \frac{2\gamma Mm^2}{L^2} \quad \text{und} \quad c = \frac{2mE}{L^2} \tag{20}$$

geht entweder über Formelsammlung (auch das will gelernt sein) oder wie folgt (kann auch mal ganz nett sein zu sehen, wie man solche Integrale manuell lösen kann):

Unter den Annahmen $a > 0$ und $\Delta = b^2 + 4ac > 0$ und der Substitution

$$R = \frac{1}{u} \qquad \Rightarrow \qquad dR = -\frac{du}{u^2}$$

erhalten wir das Integral

$$I = -\int u^2 \frac{1}{\sqrt{c + bu - au^2}}\frac{du}{u^2} = -\int \frac{du}{\sqrt{c + bu - au^2}}$$

Weiter machen wir eine quadratische Ergänzung im Radikand

$$-au^2 + bu + c = \underbrace{\frac{b^2}{4a}}_{=q^2=\frac{\Delta}{4a}+c} - \left(\sqrt{a}u - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2$$

und substituieren weiter

$$x = \sqrt{a}u - \frac{b}{2\sqrt{a}} \qquad \Rightarrow \qquad du = \frac{dx}{\sqrt{a}}.$$

Das Integral hat also nun die Form

$$I = -\frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{dx}{\sqrt{q^2 - x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{x}{q}\right) + C$$

Rücksubstitution zuerst von $x(u)$ und dann von $u(R)$ liefert uns die gewünschte Stammfunktion

$$I = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{\sqrt{a}u - \frac{b}{2\sqrt{a}}}{\frac{\sqrt{\Delta}}{2\sqrt{a}}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{\frac{2a}{R} - b}{\sqrt{\Delta}}\right)\Bigg|_{r0}^{r(\varphi)} \tag{21}$$

Das Integral aus Gl. (21) in Gl. (18) eingesetzt ergibt uns die Bahnkurve

$$\pm(\varphi - \varphi_0) = -\frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{\frac{2a}{r} - b}{\sqrt{\Delta}}\right) + \frac{1}{\sqrt{a}} \arcsin\left(\frac{\frac{2a}{r_0} - b}{\sqrt{\Delta}}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\frac{2a}{r} - b}{\sqrt{\Delta}} = \sin\left\{ \mp \sqrt{a}(\varphi - \varphi_0) + \underbrace{\arcsin\left(\frac{\frac{2a}{r_0} - b}{\sqrt{\Delta}}\right)}_{=K} \right\}$$

$$\Rightarrow \qquad r(\varphi) = \frac{\frac{2a}{b}}{1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{b}\sin(\mp\sqrt{a}(\varphi - \varphi_0) + K)} \tag{22}$$

Im Argument des Sinus wählen wir nun willkürlich das + als Vorzeichen, da der Unterschied der Vorzeichen lediglich in der Drehrichtung der Bahnkurve besteht.

Weiter wollen wir Gl. (22) auf Hauptachsenform transformieren, das ist die Darstellung in der die beiden Hauptachsen mit den Koordinatenachsen zusammenfallen und sich ein Brennpunkt im Ursprung befindet). In dieser Darstellung hat die Bahnkurve folgende Form

$$r(\varphi) = \frac{\frac{2a}{b}}{1 + \frac{\sqrt{\Delta}}{b}\cos(\sqrt{a}\varphi)} = \frac{p}{1 + \epsilon\cos(\alpha\varphi)} \tag{23}$$

Dafür müssen wir die Konstanten $r_0 = r(\varphi_0)$ und φ_0 in Gl. (22) so wählen, dass der Sinus zum Kosinus wird, d.h. es muss gelten

$$-\sqrt{a}\varphi_0 + K = \frac{\pi}{2} \tag{24}$$

Die Parameter p, ϵ und α in Gl. (23) können wir dann mit Hilfe der Parameter aus Gl. (20) bestimmen:

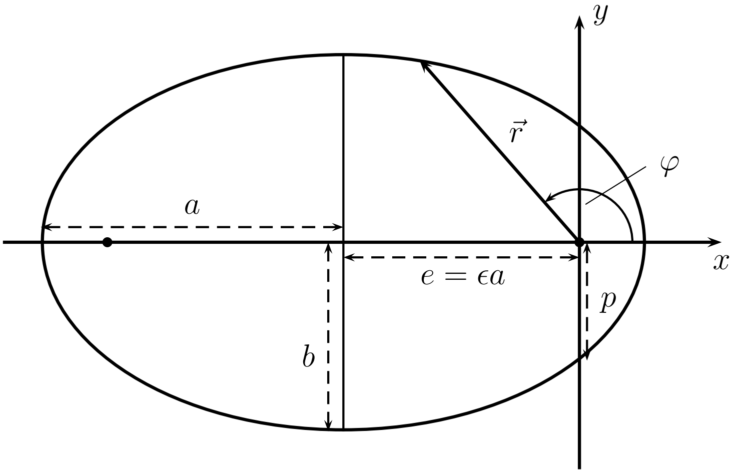
$$p = \frac{2a}{b} = \frac{L^2}{\gamma M m^2} + \frac{2\eta}{\gamma M m} \tag{25}$$

$$\epsilon = \frac{\sqrt{\Delta}}{b} = \sqrt{1 + \frac{2E}{(\gamma M m)^2}\left(\frac{L^2}{m} + 2\eta\right)} \tag{26}$$

$$\alpha = \sqrt{a} = \sqrt{1 + \frac{2m\eta}{L^2}} \tag{27}$$

Die geometrische Bedeutung dieser Ellipsenparameter ist in Abb. (1) dargestellt.

Wichtig bei diesen Resultaten ist auch zu sehen, dass nach Einsetzen von $\eta = 0$ die Lösung und Parameter des einfachen Kepler-Problems wieder herauskommen.



$r(\varphi) = \frac{p}{1+\epsilon\cos\varphi}$

a große Hauptachse
b kleine Hauptachse
p Halbparameter
ϵ Exzentrizität

Abb. 1: *Ellipse und Parameter in Hauptachsenform*

Beim Betrachten der Gl. (23) kann man schon erahnen, dass die Trajektorien nicht denen des einfachen Keplerproblems entsprechen, da der Kosinus nicht mehr 2π-periodisch ist und damit bei $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ nicht denselben Wert hat und dementsprechend auch $r(0)$ und $r(2\pi)$ verschieden sind.

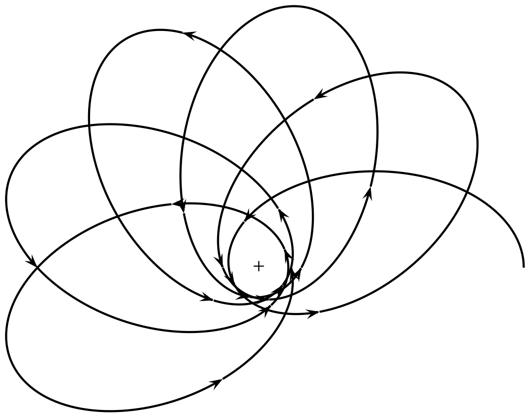
Ursache eines solchen zusätzlichen Potentials liegt in der allgemeinen Relativitätstheorie begründet. Für Planeten die sich relativ nah an großen Massen bewegen, ist durch die Raumzeitkrümmung das Gravitationspotential verändert. Bei einer Taylorentwicklung der Änderung des Potentials ergibt sich als erster zusätzlicher Term einer proportional zu $1/r^2$. Zu Beobachten ist es z.B. in der Periheldrehung des Merkurs, die damit erklärt werden konnte.

Im nächsten Abschnitt sind ein paar Graphen für verschiedene α geplottet.

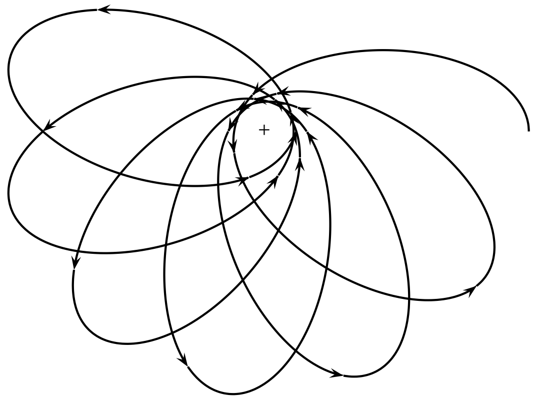
c) Graphen für verschiedene η

Hier sind nun Graphen für $0 < \epsilon < 1$ (entspricht $E < 0$, also gebundenen Zuständen) und verschiedene α aufgetragen.

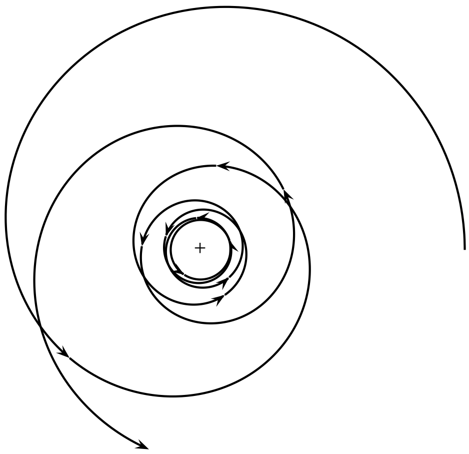
$\epsilon = 0.8$, $\alpha = 0.9$ ($\eta < 0$)



$\epsilon = 0.8$, $\alpha = 1.1$ ($\eta > 0$)



$\epsilon = 0.8$, $\alpha = 0.14$ ($\eta < 0$)



$\epsilon = 0.8$, $\alpha = 3.14$ ($\eta > 0$)