Herleitung des Energiesatzes in drei Dimensionen

Betrachte eine Bewegungsgleichung der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} \tag{1}$$

Wenn man nun beide Seiten mit $\dot{\vec{r}}$ multipliziert, erhält man

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} \tag{2}$$

Unter Beachtung der Ableitungsregeln für Vektoren kann man auf der rechten Seite die Ableitung der kinetischen Energie identifizieren (wer es nicht glaubt, kann es mal nachrechnen):

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left(\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 \right) \tag{3}$$

Kann man weiter $\vec{F}(\vec{r})$ durch die räumliche Ableitung eines skalaren Potentials ausdrücken (das minus davor ist Konvention), d.h. wenn gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla \cdot U(\vec{r}) = -\operatorname{grad} U(\vec{r}), \tag{4}$$

dann lässt sich die rechte Seite von Gl. (3) schreiben als

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} &= -\left(\nabla \cdot U(\vec{r})\right) \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= -\begin{pmatrix} \partial U/\partial x \\ \partial U/\partial y \\ \partial U/\partial z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{d}x/\mathrm{dt} \\ \mathrm{d}y/\mathrm{dt} \\ \mathrm{d}z/\mathrm{dt} \end{pmatrix} \\ &= -\left\{ \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dt}} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{dt}} \right\} \\ &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} U(\vec{r}) \end{aligned} \tag{5}$$

Also erhalten wir aus Gl. (3) und Gl. (5) zusammen den Energiesatz in der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 + U(\vec{r}) \right\} = 0 \tag{6}$$

bzw.

$$\frac{1}{2} m (\dot{\vec{r}})^2 + U(\vec{r}) = T + U = E_{\mathrm{ges}} = \text{konstant} \tag{7}$$

Konservative Kräfte

Wie man nun auch erkennt, ist der Energiesatz in der Form wie wir in eben hergeleitet haben nur dann erfüllt, wenn Gl. (4) erfüllt ist, d.h. dass $\vec{F}(\vec{r})$ ein Gradientenfeld ist. Kräfte $\vec{F}(\vec{r})$, für die dies gilt heißen *konservativ* und $U(\vec{r})$ ist dann das *Potential der Kraft* $\vec{F}$.

Äquivalente Formulierungen dafür, dass eine Kraft $\vec{F}$ konservativ ist, sind folgende:

- $\vec{F}(\vec{r})$ hat ein Potential $U(\vec{r})$, d.h. $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$.

- Das Linienintegral hängt nur vom Anfangspunkt $\vec{r}_a$ und Endpunkt $\vec{r}_e$, und nicht vom Weg ab

$$\begin{aligned}
\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} &= -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_e} \nabla U(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \\
&= -\int_{t_a}^{t_e} \nabla U(\vec{r}) \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} \mathrm{dt} \\
&= -\int_{t_a}^{t_e} \frac{\mathrm{d}U(\vec{r})}{\mathrm{dt}} \mathrm{dt} \\
&= U(\vec{r}(t_a)) - U(\vec{r}(t_e))
\end{aligned} \tag{8}$$

- Speziell gilt dann auch, dass das Wegintegral über einen geschlossenen Weg (d.h. Anfangs- und Endpunkt sind identisch), verschwindet

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = U(\vec{r}_a) - U(\vec{r}_e) \overset{\vec{r}_a \equiv \vec{r}_e}{\equiv} 0 \tag{9}$$

- $\mathrm{rot}\, \vec{F}(\vec{r}) = \mathrm{rot}\, \mathrm{grad}\, U(\vec{r}) \equiv 0$

Weiter kann man auch sehen, dass eine Zentralkraft, d.h. eine Kraft der Form

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \vec{e}_r \tag{10}$$

genau dann konservativ, wenn f nur vom Abstand $r = |\vec{r}|$ abhängt, d.h. wenn gilt

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \cdot \vec{e}_r \tag{11}$$

Die Tatsache, dass gerade zeitunabhängige Zentralkräfte $\vec{F}(\vec{r})$, die nur vom Abstand r abhängen (z.B. die Gravitationskraft), ein Potential haben können wir beim Lösen der Bewegungsgleichung

$$\vec{F}(\vec{r}) = m\ddot{\vec{r}} \tag{12}$$

ausnutzen, und die erste Integration über den Energiesatz mit Hilfe des Potentials durchführen (→ siehe Aufgabe 23 und 27).

Literatur dazu: z.B. Nolting 1, Seite 164-177. Dort stehen auch noch mehr wichtige und nützlichen Dinge drin (dass z.B. der Drehimpuls in einem Zentralkraftfeld erhalten bleibt usw.)