Trennung der Variablen

Mit „Trennung der Variablen“ bezeichnet man eine Technik zum Lösen von Differentialgleichungen (DGL) des Types

$$\dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x). \tag{1}$$

Zuerst erläutere ich die mathematisch korrekte Vorgehensweise zur Lösung der DGL in Gl. (1). Dabei geht man wie folgt vor:

$$\begin{aligned} & \dot{x}(t) = f(t) \cdot g(x) \\ \Leftrightarrow \qquad & \frac{\dot{x}(t)}{g(x)} = f(t) \end{aligned} \tag{2}$$

Jetzt werden beide Seiten über t integriert

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} dt = \int f(t) dt \tag{3}$$

Da links eine Funktion $g(x(t))$ steht, die nicht explizit sondern nur über $x(t)$ von t abhängt, substituieren wir $x(t)$

$$x(t) = u \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{du}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dx(t)}{dt} \cdot dt = du. \tag{4}$$

In dem Integral auf der linken Seite von Gl. (3) wenden wir die Substitution nun an, und erhalten

$$\int \frac{du}{g(u)} = \int f(t) dt \tag{5}$$

Die rechte Seite können wir nun unter der Annahme berechnen, dass $f(t)$ eine Stammfunktion hat, die wir $F(t)$ nennen. Wenn dann weiter auch die Stammfunktion G von $^1/_g$ existiert, können wir Gl. (5) schreiben als

$$\begin{aligned} & G(u) + c_1 = F(t) + c_2 \\ \Leftrightarrow \qquad & G(x(t)) = F(t) + c. \end{aligned} \tag{6}$$

Wenn jetzt die Funktion $G(x(t))$ auch noch lokal umkehrbar ist (die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit G^{-1}), erhalten wir die gewünschte Gleichung für $x(t)$ und damit die Lösung der DGL aus Gl. (1) durch

$$x(t) = G^{-1}(F(t) + c). \tag{7}$$

Wie man nun im Nachhinein sehen kann, kommt man auch auf Gl. (5) und damit auf die Lösung in Gl. (7), indem man ausgehend von Gl. (2) das dt auf die rechte Seite multipliziert, und dann auf der linken Seite über x und auf der rechten Seite über t integriert:

$$\begin{aligned} \text{Gl. (2)} \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{g(x)} \frac{dx}{dt} = f(t) \\ \Rightarrow \quad & \frac{dx}{g(x)} = f(t)\, dt \\ \Rightarrow \quad & \int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)\, dt \end{aligned} \tag{8}$$

Wir haben also mit Gl. (8) dieselbe Gleichung wie auch in Gl. (5) erhalten. Von da an ist das Vorgehen dementsprechend identisch.